

# Topología de las curvas algebraicas planas reales definidas implícitamente

Ioana Necula

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación

Facultad de Ciencias

Universidad de Cantabria, Santander, España

E\_mail: `ioana.necula@unican.es`

Se presenta aquí un algoritmo seminumérico, y su implementación en el Sistema de Algebra Computacional **Maple**, que, dado un polinomio bivariado libre de cuadrados  $f(x, y)$  en  $\mathbb{Q}[x, y]$ , calcula el grafo lineal que representa la estructura topológica (o forma) de la curva definida por el polinomio considerado (incluso en el caso que la curva considerado tenga singularidades “complicadas”). El algoritmo **TOP** determina el grafo topológico de una curva definida por un polinomio con coeficientes racionales y las técnicas utilizadas están basadas principalmente en la sucesión de Sturm–Habicht del polinomio que define la curva y en el concepto de posición genérica.

Los resultados teóricos que han llevado al desarrollo de este algoritmo están presentados en el artículo [1], que ha sido citado recientemente por Sederberg y Farouki en su artículo [2].

El algoritmo es muy eficiente en la práctica desde el punto de vista de los tiempos de cálculo, teniendo en cuenta que los resultados obtenidos no contienen errores numéricos, a pesar del uso de métodos numéricos pero siempre certificados con una validación a posteriori. Además, su implementación mejora sensiblemente los resultados obtenidos con las funciones predefinidas de **Maple** `algcurses[plot real curve]` y `plots[implicitplot]` tanto en tiempo de ejecución como en fiabilidad del resultado obtenido (la topología o forma obtenida es siempre correcta).

Se está considerando la aplicación de este algoritmo para resolver dos problemas concretas en Diseño Geométrico Asistido por Ordenador:

- determinar la estructura topológica de una familia finita de curvas planas
- diseñar un algoritmo que permita la caracterización de la topología del seccionado de una superficie B-spline racional.

El principal objetivo del algoritmo es generar (de la forma más rápida posible) información correcta sobre el conjunto  $f(x, y) = 0$  en  $\mathbb{R}^2$ , que pueda ser utilizada posteriormente para dibujar sin errores ni ambigüedades la curva considerada.

El algoritmo **TOP** ha sido implementado en el sistema de Algebra Computacional **Maple** (versión 8). El dato de entrada es un polinomio libre de cuadrados  $f(x, y)$  en  $\mathbb{Q}[x, y]$  y, por motivos de eficiencia, la mayoría de los cálculos se realiza utilizando números reales en coma flotante. Los datos de salida son:

- el grafo topológico de la curva,
- los valores numéricos de los puntos críticos y de los puntos regulares sobre las raíces reales del discriminante y
- la precisión que ha sido necesaria para obtener el resultado correcto.

Los nodos del grafo representan los puntos críticos (puntos singulares o de tangente vertical) y los puntos regulares sobre las raíces reales del discriminante. El proceso de conexión de las aristas viene completamente determinado por el número de ramas en cada intervalo determinado por dos raíces reales sucesivas del discriminante.

Para crear la interfaz gráfica del algoritmo **TOP** se ha utilizado el paquete de **Maple** `Maplets` (véase la Figura 1).

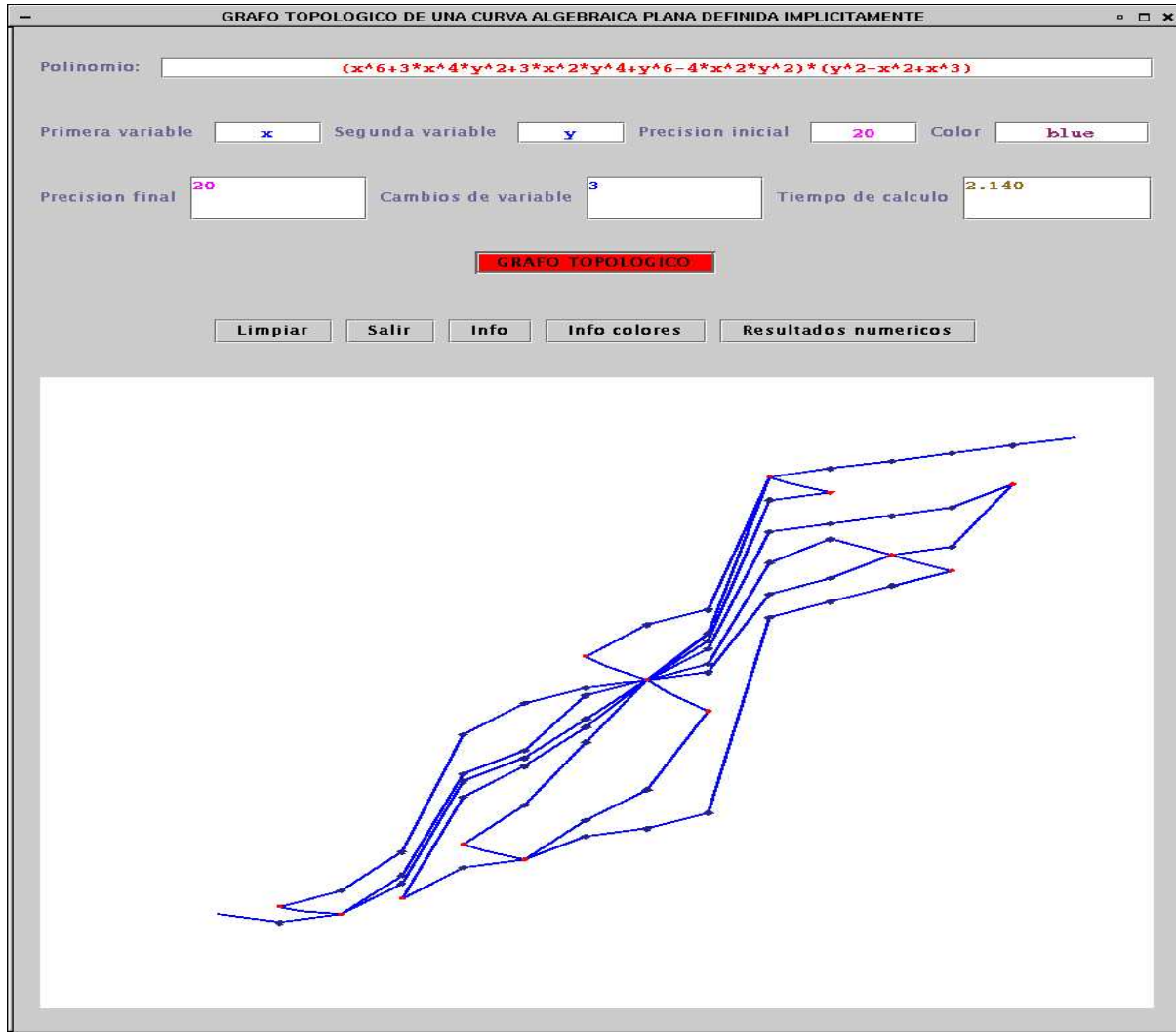


Figura 1: La interfaz gráfica del algoritmo **TOP**, creada con el paquete de **Maple Maplets**.

El algoritmo presentado en esta memoria se puede extender al caso en que los coeficientes son desconocidos de forma exacta (coeficientes en coma flotante). En este caso, para evitar posibles problemas de estabilidad, las técnicas utilizadas se basan en la reducción del problema de determinación de las raíces reales del discriminante del polinomio que define la curva a un problema de valores propios generalizados y en la estructura especial del núcleo de las matrices de Bezout del polinomio considerado y sus derivadas.

## Bibliografía

- [1] L. González-Vega, I. Necula: *Efficient topology determination of implicitly defined algebraic plane curves*. Computer Aided Geometric Design, 19(9),719–743, (2002).
- [2] X. Song, T. W. Sederberg, J. Zheng, R. T. Farouki, J. Hass: *Linear perturbation methods for topologically consistent representations of free-fprm surface intersections*. Computer Aided Geometric Design, 21, 303–319, (2004).